МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

имени Д.В. СКОБЕЛЬЦИНА

На правах рукописи

УДК 530.1

Тарасов

Тарасов Василий Евгеньевич

МОДЕЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Специальность 01.04.02 Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва-2011

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте ядерной физики имени Д.В. Скобельцина, Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН
Волович Игорь Васильевич (МИ имени В.А. Стеклова РАН)

доктор физико-математических наук, профессор
Славнов Дмитрий Алексеевич (МГУ имени М.В. Ломоносова)

доктор физико-математических наук, профессор
Фаустов Рудольф Николаевич (ВЦ имени А.А. Дородницына РАН)

Ведущая организация:

Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится "20" 10 2011 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, дом 1, строение 2, физический факультет, Северная физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Автореферат разослан "07" 09 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.10,
профессор Ю.В. Грац

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время наблюдается заметный рост интереса физиков теоретиков к методам дробного математического анализа. В первую очередь это обусловлено многочисленными эффективными приложениями интегро-дифференцирования дробного порядка к описанию широкого класса физических процессов и явлений, имеющих место в системах со степенной нелокальностью, со степенной памятью и фрактальностью.

Актуальной задачей современной теоретической физики является исследование явлений и систем, характеризующихся нелокальностью, эредитарностью, немарковостью, фрактальностью, негамильтоновостью. Последние годы уделяется большое внимание исследованиям степенной нелокальности и степенной долговременной памяти. Эти свойства изучаются для систем различной физической природы, относящихся к различным масштабам (от наносистем до космологии), для квантовых и классических систем, для непрерывных и дискретных. В настоящее время зарождаются основные физические концепции и создаются математические методы одного из современных направлений теоретической физики, называемого дробной динамикой (fractional dynamics). Фактически в настоящее время рождается новый раздел физики - дробная динамика. Правда этот термин еще не является устоявшимся в русскоязычной научной литературе, что нельзя сказать об англоязычной. В этом разделе теоретической физики рассматриваются в первую очередь общие свойства физических процессов со степенной памятью, со степенной нелокальностью и фрактальностью. При этом изучаются новые динамические свойства систем различной физической природы и масштабов, не зависящие от материала среды или типа физической системы, в котором осуществляется эта динамика.

Свойствами и явлениями, описываемыми предлагаемыми в диссертации моделями теоретической физики, являются (а) долговременная память, эредитарность, немарковская динамика; (б) степенная пространственная нелокальность и нелокальные взаимодействия степенного типа; (в) фрактальность структуры и ее нецелая топологическая размерность. Основой описания указанных явлений и свойств являются методы интегро-дифференцирования дробного порядка и дробного математического анализа, история которого насчитывает более трехсот лет и восходит к исследованиям большого числа известных математиков, таких как Лейбниц, Лиувилль, Риман, Абель, Рисс, Вейль. Интегралы и производные нецелого порядка, а также дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в физике и механике. Новые возможности в математике и теоретической физике появляются, когда порядок α дифференциального оператора D_x^α или интегрального оператора I_x^α становится произвольным параметром. При этом многие из обычных свойств дифференцирования целого порядка D_x^n не выполняются для операторов дробного дифференцирования D_x^α. Например, правило дифференцирования произведения, правило дифференцирования сложной функции, полугрупповое свойство, очевидные для производной первого порядка D_x, не имеют места для операторов D_x^α. Однако существуют аналоги этих правил и свойств, задаваемые довольно громоздкими соотношениями. Дробный математический анализ является важнейшим методом для построения моделей теоретической физики, в которых интегро-дифференциальные операторы дробного порядка по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред, процессов и явлений.

Нелокальные взаимодействия изучались как в дискретных системах, так и в их непрерывных аналогах, начиная с работ Дайсона, Накано и Такахаши. Физические процессы с долговременной памятью исследовались в вязкоупругих средах, начиная с работ Больцмана, Вольтера и Работнова. Фрактальные распределения полей и частиц активно изучаются, начиная с работ Мандельброта. При этом оставались нерешенными проблемы описания динамики фрактальных сред и распределений, динамики диэлектрических сред с универсальным откликом, неголономных систем со степенной памятью, взаимосвязи дискретных отображений с памятью и уравнений движения, согласованного описания интегральных и дифференциальных векторных операций дробного порядка, получения уравнений дробной кинетики из статистической механики, связи дискретных и непрерывных моделей физических систем с нелокальностями степенного типа, марковской динамики гамильтоновых и негамильтоновых квантовых систем со степенным экранированием окружения, квантования интегро-дифференцирования дробного порядка и некоторые другие.

Цель работы. Целью работы является

Разработать метод построения теоретических моделей, позволяющий описывать динамику фрактальных сред и распределений массы, заряда, различных типов полей и частиц, и применить этот метод для описания фрактальных систем в гидродинамике, в механике твердого тела, в электродинамике, в аналитической механике, в статистической механике.

Построить модели нелокальных взаимодействий для дискретных физических систем, таких как кристаллические решетки и линейные цепочки, которые в непрерывном пределе будут описываться уравнениями движения с производными дробного порядка.

Развить методы дробного векторного математического анализа и дробного внешнего исчисления для построения моделей физических систем со степенной нелокальностью и применить эти методы для описания моделей нелокальных систем в электродинамике, статистической механике, аналитической механике.

Построить теоретические модели систем различной физической природы, обладающих степенной памятью, а именно, (а) диэлектрических сред, подчиняющихся законам универсального отклика; (б) механических систем с неголономными связями и долговременной степенной памятью; (в) физических систем с периодическими толчками и степенной памятью, уравнения движения которых допускают представление в виде дискретных отображений с памятью.

Построить модели марковских гамильтоновых, негамильтоновых и открытых квантовых систем со степенным экранированием окружения и разработать метод вейлевского квантования интегро-дифференцирования дробного порядка для построения квантовых аналогов моделей со степенными нелокальными свойствами.

Научная новизна. Новизна научных результатов, полученных автором и выносимых им на защиту, определяется следующим.

а) Построены принципиально новые модели описания динамики фрактальных сред и распределений, в которых они представляются специальными сплошными средами, при этом их характеристики и динамические законы описываются интегральными уравнениями дробных порядков равных нецелым (массовой, зарядовой, частичной и др.) размерностям сред и распределений.

б) Впервые разработан метод получения в непрерывном пределе моделей нелокальных сплошных сред, описываемых интегро-дифференцированием нецелого порядка по координатам, из уравнений движения дискретных систем (таких как линейные цепочки и кристаллические решетки) с нелокальными взаимодействиями степенного типа.

в) Впервые взаимно согласовано определены дифференциальные и интегральные векторные операции дробного порядка, на их основе сформулированы и доказаны обобщения интегральных теорем Грина, Стокса, Гаусса. Используя методы дробного векторного анализа, нами были построены новые модели статистической механики и электродинамики со степенными нелокальностями.

г) Впервые построены модели градиентных и гамильтоновых систем дробного порядка, позволяющие сводить изучение широкого класса неградиентных и негамильтоновых систем к исследованию свойств обобщенных потенциалов и гамильтонианов.

д) Предложен новый метод описания электромагнитных полей в диэлектрических средах, подчиняющихся законам универсального отклика, основанный на использовании уравнений с интегро-дифференцированиями дробного порядка, который явно выражается через экспериментально измеримые показатели степенной зависимости универсального отклика.

е) Впервые построены модели физических систем, на которые наложены неголономные связи с памятью, описываемой интегро-дифференцированиями Римана-Лиувилля и Капуто дробного порядка.

ж) Впервые построены без каких-либо аппроксимаций модели дискретных систем (отображений) с памятью, эквивалентные моделям физических систем с периодическими толчками и со степенной памятью, описываемой интегро-дифференцированием дробного порядка.

з) Впервые построены модели квантовых гамильтоновых и негамильтоновых систем со степенным экранированием окружения, в которых использовались дробные степени супероператоров.

и) Впервые реализовано вейлевское квантование интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля и Лиувилля дробного порядка, позволяющее описывать квантовые аналоги классических систем со степенными нелокальностями.

Достоверность. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается использованием современных математических методов расчета, ясной физической интерпретацией описываемых свойств и явлений, возможностью экспериментальной проверки полученных решений. Правильность результатов проверялась с помощью предельных переходов к известным случаям и использованием компьютерных программ аналитических вычислений.

Практическая ценность. Построение моделей фрактальных сред и процессов имеет практическую ценность, так как в предлагаемых моделях дробный порядок интегрирования выражается через экспериментально измеримые (массовые, зарядовые и другие) нецелые размерности этих сред и распределений. Результаты, полученные в рамках дробно-интегральных моделей, могут быть использованы при расчетах динамических характеристик и мультипольных моментов фрактальных сред и распределений различных типов в различных областях от астрофизики до расчета коллекторов нефтегазовых месторождений.

В полученных уравнениях для электромагнитного поля в диэлектрических средах, подчиняющихся законам универсального отклика, дробный порядок интегро-дифференцирования явно выражается через экспериментально измеримые показатели степенной зависимости универсального отклика. Эти уравнения позволяют в широком диапазоне частот точно описывать свойства материалов с низкими потерями на излучение, которые имеют важное значение для стелс-технологий.

Дискретные отображения с памятью, полученные из уравнений движения с производными дробных порядков, могут быть использованы в компьютерном моделировании физических систем с долговременной степенной памятью, что позволяет исследовать новые типы регулярных и странных аттракторов.

Полученные в диссертации модели описания физических систем со степенной пространственной нелокальностью, со степенной долговременной памятью, и фрактальными свойствами во многом расширяют существующие представления о динамических свойствах этих систем и могут стать важной частью учебных курсов по теоретической физике.

Личный вклад автора. Две монографии на английском языке, одна переведена на русский язык, и 41 статья, опубликованная по теме диссертации в рецензируемых российских и зарубежных журналах, являются единоличными публикациями автора диссертации. В 14 статьях, выполненных с соавторами и опубликованных в рецензируемых зарубежных журналах, вклад автора диссертации является определяющим, как на этапах постановки задач, так и на этапах проведения аналитических расчетов, а также интерпретации полученных результатов.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах НИИ ядерной физики МГУ, физического факультета и института математических наук им. Куранта Нью-Йоркского университета (США), физического факультета университета Барселоны (Испания), математического факультета Сингапурского университета (Сингапур), а также на международных конференциях: XIX-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (2010, Москва); Международная конференция "Динамический хаос и неравновесная статистическая механика: От точных результатов к применениям в нано-системах"(2006, Сингапур); Международная конференция по хаотическим явлениям переноса и сложности в жидкостях и плазме (2004, Карри ле Роует, Франция); XVII-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (2003, Самара-Саратов); Первый международный симпозиум по квантовой информатике (2002, Липки, Московская область); XVI-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (2001, Москва); XV-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (2000, Тверь); XIV-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (1999, Москва); 37 Международная университетская конференция по физике ядра и частиц (1998, Шладминг, Австрия); XII-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (1997, Самара); XI-ая Международная конференция по физике высоких энергий и квантовой теории поля (1996, Санкт-Петербург); Международная конференция по квантовой диссипации и ее применениям (1996, Триест, Италия).

Исследования, результаты которых вошли в настоящую диссертацию, были поддержаны Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова: грант 2006 года за цикл статей "Физика фрактальных сред и процессов" и грант 2009 года за монографию "Квантовая механика негамильтоновых и диссипативных систем"; Российским фондом фундаментальных исследований в 2002-2003 годах: грант No. 02-02-16444-а "Исследования теорий с дополнительными измерениями и нетривиальной структурой пространства-времени"; в 2000-2001 годах - грант No. 00-02-17679-а "Изучение физических эффектов в моделях с дополнительными измерениями и нетривиальной структурой пространства-времени"; Министерством энергетики США (U.S. Department of Energy): грант No. DE-FG02-92ER54184; Офисом Военно-морских Исследований США (US Office of Naval Research): грант No. N00014-02-1-0056; Национальным научным фондом США (U.S. National Science Foundation): грант No. DMS-0417800.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 3 монографиях и в 55 статьях, опубликованных в рецензируемых российских и зарубежных журналах. Из них 53 статьи опубликованы в журналах, включённых в систему цитирования Web of Science: Science Citation Index Expanded. Список статей и монографий приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и списка литературы. Она содержит 298 страниц машинописного текста, в том числе основной текст 255 страниц. Приведенная библиография содержит 330 наименований.

СОЖЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор различных подходов к проблеме описания физических систем, обладающих свойствами степенной нелокальности, фрактальности и степенной памятью, использующих методы интегро-дифференцирования дробного порядка. Формулируются тема и основные цели диссертации, обосновывается их актуальность, схематично излагается содержание каждой главы.

В первой главе рассматриваются основные понятия дробно-интегральных моделей фрактальных распределений и сред. Интегрирование нецелого порядка используется для описания фрактальных распределений массы, заряда, полей, частиц и вероятности. В первой главе рассмотрены дробно-интегральные модели фрактальных сред и распределений в гидродинамике, в механике абсолютно твердого тела, в теории случайных процессов, в электродинамике, в статистической механике. Выводятся уравнения движения и описываются свойства фрактальных сред и распределений.

В первом параграфе первой главы рассматриваются основные понятия дробно-интегральных моделей фрактальных сред. У реальных сред и физических систем фрактальная структура не может наблюдаться на всех масштабах. Среды и системы обладают наименьшим характеристическим размером таким, как радиус частицы (например, атома или молекулы). Фрактальная структура обычно существует при тех масштабах R, для которых $R > R_0$, где R_0 - характерный размер частицы среды. В силу этого используется физический аналог размерности Хаусдорфа, для которого не требуется предельного перехода к бесконечно малым диаметрам покрывающих множеств. В качестве такой размерности используются массовая размерность, зарядовая размерность и размерность числа частиц. Под фрактальными средами в диссертации подразумеваются среды, распределенные в пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3$, массовая размерность D которых меньше размерности пространства n. Размерность D фрактальных сред может быть эмпирически получена методом поклеточного счета (box-counting method). Интегрирование нецелого порядка используется для описания фрактальных распределений массы, заряда, частиц и вероятности. Порядок интегрирования равен соответствующей (массовой, зарядовой, частичной) размерности фрактального распределения или среды. Для описания фрактальных сред и распределений с помощью дробно-интегральных моделей используются два основных понятия такие, как плотность состояний $c_n(D, \mathbf{r})$ и функция распределения $\rho(\mathbf{r}, t)$. Функция $c_n(D, \mathbf{r})$, являющаяся плотностью состояний, описывает то, как плотно упакованы разрешенные состояний в пространстве $\mathbb{R}^n$. При этом свойства симметрии функции плотности состояний $c_n(D, \mathbf{r})$ должны определяться свойствами симметрии фрактальной среды, то есть симметрией распределения разрешенных состояний в ней. Функция $\rho(\mathbf{r}, t)$, являющаяся функцией плотности распределения, описывает распределение физических величин (например, таких как масса, электрический заряд, вероятность, число частиц) на множестве разрешенных состояний в $\mathbb{R}^n$ в момент времени t. Приводятся модели фрактальных распределений частиц и разрешенных состояний. Обсуждаются методы описания массы, заряда, числа частиц и вероятности для фрактальных сред и распределений.

Во втором параграфе первой главы рассматривается гидродинамика фрактальных сред, описываемых в рамках дробно-интегральной модели. В дробно-интегральной модели характеристики фрактальных сред определены везде внутри области, при этом они подчиняются дробно-интегральным уравнениям, порядок которых равен массовой размерности среды, то есть предлагается рассматривать фрактальные среды как особый тип сплошных сред, описываемых с помощью специальных (дробно-интегральных) моделей. В общем случае фрактальные среды не могут рассматриваться как сплошные среды, поскольку существуют точки и области во фрактальной среде, которые не заполнены частицами среды. Реальные фрактальные среды с нецелой массовой размерностью описываются не как фрактальные множества, а как особые сплошные среды, для описания которых применяется интегрирования дробного порядка, равного массовой размерности фрактальной среды. Интегралы дробного порядка применяются для получения обобщений уравнений законов сохранения на фрактальные среды. Выводятся интегральные уравнения дробного порядка, описывающие законы сохранения массы, импульса и внутренней энергии во фрактальных средах. Используя дробно-интегральную модель, получаем соответствующие дифференциальные уравнения с производными целого порядка для описания законов сохранения массы, импульса и внутренней энергии в дифференциальной форме для фрактальных сред. Рассматриваются обобщения уравнений Навье-Стокса и уравнений Эйлера для фрактальных сред. Предлагаются уравнения равновесия для фрактальных сред и обобщения интеграла Бернулли. Рассматриваются звуковые волны во фрактальных средах с использованием дробно-интегральной модели.

В третьем параграфе первой главы рассматривается динамика фрактальных неупругих твердых тел. В рамках дробно-интегральной модели предлагаются интегральные уравнения дробного порядка для вычисления моментов инерции фрактальных твердых тел. Рассматриваются примеры вычислений моментов инерции для фрактальных твердых тел в форме шара и цилиндра. Доказывается, что уравнения движения фрактальных твердых тел имеют тот же вид, что и уравнения для нефрактальных твердых тел. При этом моменты инерции фрактальных тел отличаются от моментов инерции обычных твердых тел той же формы и массы. В качестве примеров движения фрактальных твердых тел рассматриваются динамика маятника Максвелла с фрактальным твердым телом и задача о скатывании по наклонной плоскости недеформируемого шарообразного фрактального твердого тела. Полученные уравнения позволяют экспериментального определять массовые размерности фрактальных твердых тел путем измерения периодов колебаний и скоростей движения этих тел.

В четвертом параграфе первой главы рассматривается электродинамика фрактальных распределений зарядов и полей. В общем случае распределения заряженных частиц могут быть фрактальными с нецелой зарядовой или частичной размерностью. Для описания электрических и магнитных полей фрактальных распределений частиц применяются дробно-интегральные модели, в которых используются непрерывные распределения электрического заряда, описываемые интегральными уравнениями дробного порядка. Предлагается дробно-интегральная модель для описания электрических и магнитных полей, создаваемых фрактальными распределениями. Приводятся формулы полного электрического заряда и силы тока фрактальных распределений зарядов. В рамках дробно-интегральной модели формулируются теоремы Гаусса и Стокса для фрактальных распределений. Рассматриваются простые примеры полей, создаваемых гомогенными фрактальными распределениями. Законы Кулона и Гаусса, Био-Савара и Ампера формулируются для фрактальных распределений в рамках дробно-интегральной модели. Предлагаются методы вычислений электрического дипольного и квадрупольного моментов фрактальных распределений зарядов. Обсуждаются уравнения магнитогидродинамики фрактальных распределений заряженных частиц.

В рамках дробно-интегральной модели фрактального распределения получены интегральные уравнения Максвелла дробного порядка. Показано, что фрактальное распределение может быть представлено как некоторая эффективная среда. Уравнения для электромагнитных полей фрактальных распределений интерпретируются как эффекты поляризации и намагниченности, создаваемые фрактальным распределением. Более того, и само электромагнитное поле также изменяется фрактальным распределением. Из обобщенных уравнений Максвелла виден эффект изменения фрактальным распределением свободных электрических зарядов и плотности тока. Это изменение существует в дополнение к эффекту появления поляризации и токов намагниченности. Эффективная электрическая проницаемость ε и эффективная магнитная проницаемость μ фрактального распределения определяются плотностью состояний и зарядовой размерностью распределения. Уравнения для электромагнитного поля в этом случае могут рассматриваться как уравнения с некоторым эффективным магнитным монополем.

В пятом параграфе первой главы предлагается обобщение принципа стационарности действия для фрактальных сред. В качестве примера выводятся уравнения Гинзбурга-Ландау для фрактальных сред с использованием соответствующих обобщений функционала свободной энергии и вариационного уравнения Эйлера-Лагранжа.

В шестом параграфе первой главы рассматриваются уравнения Чепмена-Колмогорова и Фоккера-Планка для фрактальных сред. Предлагается обобщение уравнения Чепмена-Колмогорова на случай фрактальных распределений вероятности, описываемых в рамках дробно-интегральной модели. Под фрактальным распределением вероятности подразумевается такое распределение вероятности во фрактальной среде, при котором вероятность найти частицу вне этой среды равна нулю. Предложенное уравнение Чепмена-Колмогорова представляет собой интегральное уравнение дробного порядка по координатам. Уравнение Чепмена-Колмогорова дробного порядка призвано описывать марковские процессы во фрактальных средах в рамках дробно-интегральной модели. Из дробно-интегрального уравнения Чепмена-Колмогорова выводится обобщенное уравнение Фоккера-Планка, описывающее динамику фрактальных распределений в рамках дробно-интегральных моделей.

В седьмом параграфе первой главы рассматривается статистическая механика фрактальные распределения в фазовом пространстве. Для описания таких распределений применяется дробно-интегральная модель, в которой используются интегральные уравнения дробного порядка для средних значений и нормировочных условий. Ядрами дробно-интегральных уравнений по координатам являются плотности состояний в фазовом пространстве. При получении обобщений уравнений Лиувилля и Боголюбова для фрактальных распределений разрешенных состояний в фазовом пространстве используются дробно-интегральные нормировочные условия и выражения для средних значений классических наблюдаемых. В этих обобщениях используются интегралы дробного порядка, позволяющие учитывать степенную плотность состояний. Порядок дробного интегрирования равен фрактальной размерности числа состояний.

Во второй главе рассматриваются модели физических систем и сред с нелокальными свойствами и с нелокальными взаимодействиями степенного типа, для описания которых применяются методы интегро-дифференцирования дробного порядка по координатам.

В первом параграфе второй главы рассматриваются модели цепочек и решеток с нелокальным взаимодействием, а также их непрерывные пределы. Определяется отображение моделей дискретных систем в модели специальных сплошных сред, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка. Описывается широкий класс нелокальных взаимодействий в решетках и цепочках, которые в непрерывном пределе приводят к дифференциальным уравнениям с производными дробного порядка. Показано, что существует взаимосвязь между уравнениями движения систем с нелокальным взаимодействием частиц и уравнениями дробного порядка для сплошных сред. Рассматривая решетку связанных нелинейных осцилляторов, и переходя к непрерывному пределу, мы выводим дробные дифференциальные уравнения, описывающие динамику сложных сплошных сред. Уравнения движения для цепочки с нелокальным взаимодействием отображаются в уравнения с дробными производными Рисса. Нелинейные нелокальные взаимодействия для дискретных систем используются для получения обобщений уравнений Бюргерса, Кортевега-де Фриза и Буссинеска, содержащих производные дробного порядка. Описывается нелокальное взаимодействие типа Грюнвальда-Летникова-Рисса и соответствующие ему уравнения среды, являющиеся интегро-дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Во втором параграфе второй главы рассматриваются взаимно согласованные определения дифференциальных и интегральных векторных операций с интегро-дифференцированием дробного порядка. На основе предложенных определений дифференциальных и интегральных векторных операций нецелого порядка формулируются и доказываются обобщения теорем Грина, Стокса, Гаусса. Методы векторного интегро-дифференцирования дробного порядка развиваются для исследования моделей физических систем в электродинамике, аналитической механике, статистической физике. Развиваются также методы дробного внешнего исчисления дифференциальных форм, дается взаимно согласованое построение дифференциальные и интегральные операций дробного порядка для обобщения дифференциальных форм с использованием производные Капуто и интегралы Римана-Лиувилля дробного порядка. Определяются векторные операции нецелого порядка через дробные дифференциальные формы, операцию звезда Ходжа и внешнюю производную дробного порядка.

Во третьем параграфе второй главы используются взаимосогласованные определения дифференциальных и интегральных векторных операций с интегро-дифференцированием дробного порядка для описания электромагнитных полей. В рамках нелокальной электродинамики рассматриваются дифференциальные уравнения Максвелла с производными дробного порядка с использованием дробного векторного анализв и дифференциальных форм нецелого порядка.

В четвертом параграфе второй главы предлагаются обобщения некоторых основных уравнений статистической механики, в которых используются интегро-дифференцирования дробного порядка. Для получения этих уравнений используется закон сохранения вероятности в дробно-дифференциальном элементе объема фазового пространства. Из законов сохранения вероятности получаем уравнения Лиувилля с дробными производными по координатам и импульсам. Дробное уравнение Лиувилля используется для получения дробных уравнений Боголюбова и кинетических уравнений с дробными производными. Рассматриваются уравнения статистической механики для дробных гамильтоновых систем. Уравнения Лиувилля и Боголюбова с дробными производными по координатам и импульсам рассматриваются как базис для получения обобщенных кинетических уравнений. Получены уравнение Власова с производными нецелого порядка. Уравнения Фоккера-Планка с дробными производными в фазовом пространстве получаются из уравнения Боголюбова с производными дробного порядка.

<u>**В пятом параграфе второй главы**</u> предлагаются обобщения понятий градиентной и гамильтоновой систем с использованием дифференциальных форм и внешних производных дробных порядков. В общем случае дробные гамильтоновы (градиентные) системы являются негамильтоновы (неградиентными) системами. Предлагаемый класс дробных градиентных и гамильтоновых систем значительно шире, чем класс обычных градиентных и гамильтоновых динамических систем. Обычные гамильтоновы и градиентные системы фактически являются частными случаями дробных гамильтоновых и градиентных систем. Дробные градиентные системы используются для рассмотрения нового типа бифуркаций для широкого класса неградиентных систем.

<u>**В третьей главе**</u> рассматриваются модели физических систем и сред с эредитарными свойствами и с долговременной памятью степенного типа с использованием методов интегро-дифференцирования дробного порядка по времени.

<u>**В первом параграфе третьей главы**</u> показывается, что электромагнитные поля и волны для широкого класса диэлектрических сред должны описываться

дифференциальными уравнениями с производными нецелого порядка по времени. Порядок этих производных равен $2-\alpha$ и $2+\beta$, где параметры $0<\alpha=1-n<1$ и $0<\beta=m<1$ определяются показателями n и m, фигурирующими в экспериментально измеримых частотных зависимостях диэлектрической восприимчивости, называемых законами универсального отклика. Получены уравнения, описывающие обобщения закона Кюри - фон Швейдлера и закон Гаусса для диэлектрических материалов с универсальным откликом. Получены дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн в диэлектрических средах. Эти уравнения являются общими для широкого класса сред независимо от их физической структуры, химического состава и природы поляризации, будь то дипольная, электронная или ионная.

<u>Во втором параграфе третьей главы</u> рассматриваются неинтегрируемые (неголономные) связи с долговременной степенной памятью, описываемой интегро-дифференцированием дробного порядка по времени. Производные нецелого порядка позволяют описывать неголономные связи со степенной памятью с использованием методов дробного математического анализа.

Для системы, описываемых лагранжианом $L=T-U$, непотенциальными силами Q_k, и неинтегрируемыми связями $f_s=0$, $s=1,...,m$, рассматриваются следующие два частных случая неголономной динамики систем с памятью:

а) Динамические системы с памятью, на которые наложены неголономные связи без памяти:

$$L=L(q,\ {}_a\mathcal{D}_t^\alpha q,\ {}_t\mathcal{D}_b^\alpha q),\quad f_s(q,D_t^1 q,t)=0,\quad s=1,...,r<n.$$

б) Динамические системы, на которые наложены неголономные связи с памятью:

$$L=L(q,D_t^1 q),\quad f_s(q,\ {}_a\mathcal{D}_t^\alpha q,\ {}_t\mathcal{D}_b^\alpha q,t)=0,\quad s=1,...,r<n.$$

Здесь ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$ обозначает производную дробного порядка α по времени t.

Используя принцип Даламбера-Лагранжа, мы выводим дробные дифференциальные уравнения из лагранжиана и гамильтониана, которые содержат только производные целого порядка, при условии наложения на систему неголономных связей со степенной памятью. Обсуждается применимость принципа стационарности действия для неголономных систем с долговременной памятью.

В третьем параграфе третьей главы рассматриваются модели дискретных систем со степенной памятью, которые следуют из уравнений движения, содержащих производные дробного порядка по временим. Эффект памяти в дискретных системах означает, что эволюция данного состояния зависит от всех прошлых состояний. Дискретные отображения со степенной памятью выводятся из дифференциальных уравнений с производными дробного порядка по времени без использования каких-либо аппроксимаций дробных производных. Рассматриваются дробные дифференциальные уравнения, описывающие движение систем с памятью и периодическими толчками. Из этих уравнения получены соответствующие дискретные отображения с памятью, являющиеся обобщениями хорошо известных отображений таких, как стандартное и универсальное отображения, отображения Амосова, Заславского и Хенона. Для получения дискретных отображений с памятью из дробных дифференциальных уравнений используются два метода. В первом методе применяются вспомогательные переменные. Вторым методом дискретные отображения с памятью выводятся из дифференциальных уравнений с производными Капуто и Римана-Лиувилля с использованием эквивалентности задачи Коши и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Наличие памяти у дискретных систем приводит к тому, что эволюция данного состояния зависит от всех предыдущих состояний. При этом влияние этих состояний определяется степенными весовыми функциями $V_\alpha(z)$, $S_\alpha(z)$ и $W_\alpha(a,b,c)$. Полученные модели дискретных систем с памятью выводятся из соответствующих уравнений движения с интегро-дифференцированием дробного порядка без использования какие-либо аппроксимации производных дробного порядка.

В четвертой главе рассматриваются модели квантовых гамильтоновых и негамильтоновых систем, взаимодействующих со своим окружением и описываемых дробными степенями инфинитезимальных производящих генераторов. Описываются динамические свойства экранированных квантовых систем. Используя вейлевское квантование и представление производных нецелого порядка в виде ряда и в виде интеграла Фурье, мы строим квантовые аналоги производных Римана-Лиувилля и производных Лиувилля.

В первом параграфе четвертой главы рассматриваются модели гамильтоновых квантовых систем, взаимодействующих с окружением и описываемых дробными степенями дифференцирований на операторной алгебре. Для гамильтоновых систем уравнение Гейзенберга определяется некоторой формой дифференцирования на операторной алгебре. Инфинитезимальный генератор $\mathcal{L} = (i/\hbar)[H, \, . \,]$, используемый в уравнении Гейзенберга, является дифференцированием наблюдаемых, то есть линейным отображением $\mathcal{L}$, которое удовлетворяет правилу Лейбница. Дробное дифференцирование на множестве квантовых наблюдаемых рассматривается как дробная степень дифференцирования $\mathcal{L} = (i/\hbar)[H, \, . \,]$, что позволяет обобщить понятие гамильтоновой квантовой системы. В этом случае операторное уравнение для квантовой наблюдаемой будет (дробно-дифференциальным) обобщением уравнения Гейзенберга. Предлагаемое обобщенное уравнение Гейзенберга точно решается для гармонического осциллятора. Решения задачи Коши для дробно-дифференциального уравнения Гейзенберга представляются через супероператоры $\Phi_t^{(\alpha)}$, $t > 0$, которые образуют однопараметрическую полугруппу. В силу этого эволюция наблюдаемых дробно-дифференциальных квантовых систем является марковской. Дифференцирование нецелого порядка рассматривается как один из способов описания взаимодействия между квантовой системой и окружающей средой. Эта интерпретация обусловлена тем, что формула Бохнера-Филлипса представляет собой некоторое сглаживание (усреднение) гамильтоновой эволюции Φ_t по времени $t > 0$. Это сглаживание интерпретируется как влияние окружающей среды на квантовую систему. Показатель степени инфинитезимального генератора характеризует меру интенсивности взаимодействия между системой и окружением.

Во втором параграфе четвертой главы рассматриваются модели открытых и негамильтоновых квантовых систем, взаимодействующих с экранированным окружением с использованием дробных степеней вполне-диссипативных супероператоров. Доказывается, что предлагаемые супероператоры являются инфинитезимальными генераторами вполне положительных полугрупп. Описываются основные свойства квантовой дробно-динамической полугруппы. Нецелая степень квантового марковского производящего супероператора рассматривается как параметр для описания меры экранирования окружающей среды. Квантовые марковские уравнения с вполне диссипативными супероператорами являются наиболее общим видом марковских уравнений, описывающих неунитарную эволюцию оператора плотности, сохраняющую след и являющуюся вполне положительной при любых начальных условиях. Показатель нецелой степени инфинитезимального генератора рассматривается как параметр, описывающий меру экранирования окружения системы, то есть окружающей ее среды. Используя представление взаимодействия для квантового марковского уравнения, мы рассматриваем дробную степень негамильтоновой части инфинитезимального генератора с показателем α. В пределе $\alpha \to 0$ получается уравнение Гейзенберга для гамильтоновых систем. В случае $\alpha = 1$ получается обычное квантовое марковское уравнение. Выделяются следующие случаи: (а) отсутствие влияния окружающей среды ($\alpha = 0$); (б) полное влияние окружающей среды ($\alpha = 1$); (в) степенное экранирование влияния окружающей среды ($0 < \alpha < 1$).

В отличие от гамильтоновых квантовых систем инфинитезимальные генераторы открытых и негамильтоновых систем не является дифференцированиями на алгебре квантовых наблюдаемых. Для широкого класса квантовых негамильтоновых систем инфинитезимальный генератор $\mathcal{L}$ является вполне диссипативным. Рассматривается обобщение квантового производящего уравнения для негамильтоновых систем на случай дробной степени производящего супероператора и на случай системы со степенной долговременной памятью. Формула Бохнера-Филлипса позволяет выразить дробно-динамическое описание в терминах обычной динамики. Предложенные квантовые марковские уравнения с дробными степенями супероператоров уравнения решены для линейного гармонического осциллятора, являющегося открытой системой.

В третьем параграфе четвертой главы рассматриваются методы вейлевского квантования для интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля и Лиувилля. Для нахождения квантового аналога производных Римана-Лиувилля используется представление этих производных на множестве аналитических функций. В этом представлении производная Римана-Лиувилля является степенным рядом с производными целого порядка, что позволяет использовать соответствие между производными целого порядка и самосопряженными коммутаторами. Для определения квантового аналога производной Лиувилля, которая определена на всей действительной оси, используется представление вейлевского квантования через Фурье-преобразование. Предлагаемые квантование производных Римана-Лиувилля позволяют сформулировать квантовые аналоги дробных гамильтоновых систем.

В приложении приводятся основные сведения об интегрировании дробного порядка.

В заключении формулируются основные результаты, полученные в диссертации. Они сводятся к следующим:

1. Построены принципиально новые модели описания динамики фрактальных сред и распределений, в которых они представляются специальными сплошными средами, при этом их характеристики и динамические законы описываются интегральными уравнениями дробного порядка. Порядок интегрирования определяется нецелыми (массовой, зарядовой, частичной и др.) размерностями среды и распределения. Описаны способы расчета масс, зарядов, потоков, полей, мультипольных моментов, моментов инерции, энергий, импульсов и других характеристик фрактальных сред и распределений.

2. Впервые построены теоретические модели дискретных систем, таких как линейные цепочки и кристаллические решетки, с нелокальными взаимодействиями степенного типа, приводящие в непрерывном пределе к моделям нелокальных сплошных сред, описываемых уравнениями с интегро-дифференцированиями нецелого порядка по координатам. Показано, что степенная нелокальность в непрерывных средах связана с межчастичным взаимодействием дробно-степенного типа.

3. Впервые взаимно согласовано определены дифференциальные и интегральные векторные операции дробного порядка, на их основе сформулированы и доказаны интегральные теоремы, построены новые модели статистической механики и электродинамики со степенными нелокальностями. Впервые построены модели градиентных и гамильтоновых систем дробного порядка, позволяющие сводить изучение широкого класса неградиентных и негамильтоновых систем к исследованию свойств обобщенных потенциалов и гамильтонианов.

4. Предложен принципиально новый подход к описанию электромагнитных полей в диэлектрических средах, подчиняющихся законам универсального отклика. В основе этого подхода лежат интегро-дифференциальные уравнения, дробный порядок которых явно выражается через экспериментально измери-

мые показатели степенной зависимости универсального отклика.

5. Впервые построены модели неголономных систем со степенной памятью, использующие интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто дробного порядка. Показано, что эффекты памяти могут возникать вследствие наложения на систему неголономных связей.

6. Впервые построены без каких-либо аппроксимаций модели дискретных систем (отображений) с памятью, эквивалентные моделям физических систем с периодическими толчками и со степенной памятью, описываемой интегро-дифференцированием дробного порядка.

7. Впервые построены модели квантовых гамильтоновых и негамильтоновых систем со степенным экранированием окружения и описаны динамические свойства таких систем. Впервые реализовано вейлевское квантование интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля и Лиувилля дробного порядка, позволяющее описывать квантовые аналоги классических систем со степенными нелокальностями.

Список опубликованных работ

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Tarasov V.E. Quantization of non-Hamiltonian and dissipative systems // Physics Letters A. Vol.288. No.3-4. (2001) 173-182.

2. Тарасов В.Е. Вейлевское квантование динамических систем с плоским фазовым пространством // Вестник Московского университете. Серия 3 Физика. Астрономия. Т. 56. No.6. (2001) С. 6-9.

3. Tarasov V.E. Fractional generalization of Liouville equations // Chaos. Vol.14. No.1. (2004) 123-127.

4. Tarasov V.E. Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems // Journal of Physics A. Vol.38. No.26. (2005) 5929-5943.

5. Tarasov V.E. Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles // Physics of Plasmas. Vol.12. No.8. (2005) 082106 (9 pages).

6. Tarasov V.E. Multipole moments of fractal distribution of charges // Modern Physics Letters B. Vol.19. No.22. (2005) 1107-1118.

7. Tarasov V.E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media // Annals of Physics. Vol.318. No.2. (2005) 286-307.

8. Tarasov V.E. Dynamics of fractal solid // International Journal of Modern Physics B. Vol.19. No.27. (2005) 4103-4114.

9. Tarasov V.E. Fractional generalization of gradient systems // Letters in Mathematical Physics. Vol.73. No.1. (2005) 49-58.

10. Tarasov V.E. Wave equation for fractal solid string // Modern Physics Letters B. Vol.19. No.15. (2005) 721-728.

11. Tarasov V.E. Continuous medium model for fractal media // Physics Letters A. Vol.336. No.2-3. (2005) 167-174.

12. Tarasov V.E. Possible experimental test of continuous medium model for fractal media // Physics Letters A. Vol.341. No.5-6. (2005) 467-472.

13. Tarasov V.E. Fractional Fokker-Planck equation for fractal media // Chaos. Vol.15. No.2. (2005) 023102.

14. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional Ginzburg-Landau equation for fractal media // Physica A. Vol.354. No.1-4. (2005) 249-261.

15. Tarasov V.E. Fractional Liouville and BBGKI equations // Journal of Physics: Conference Series. Vol.7. (2005) 17-33.

16. Tarasov V.E. Fractional systems and fractional Bogoliubov hierarchy equations // Physical Review E. Vol.71. No.1. (2005) 011102 (12 pages).

17. Tarasov V.E. Map of discrete system into continuous // Journal of Mathematical Physics. Vol.47. No.9. (2006) 092901. (24 pages)

18. Tarasov V.E. Fractional statistical mechanics // Chaos. Vol.16. No.3. (2006) 033108.

19. Tarasov V.E. Electromagnetic fields on fractals // Modern Physics Letters A. Vol.21. No.20. (2006) 1587-1600.

20. Tarasov V.E. Continuous limit of discrete systems with long-range interaction // Journal of Physics A. Vol.39. No.48. (2006) 14895-14910.

21. Tarasov V.E. Fractional variations for dynamical systems: Hamilton and Lagrange approaches // Journal of Physics A. Vol.39. No.26. (2006) 8409-8425.

22. Tarasov V.E. Psi-series solution of fractional Ginzburg-Landau equation // Journal of Physics A. Vol.39. No.26. (2006) 8395-8407.

23. Tarasov V.E. Magnetohydrodynamics of fractal media // Physics of Plasmas. Vol.13. No.5. (2006) 052107. (12 pages)

24. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Nonholonomic constraints with fractional derivatives // Journal of Physics A. Vol.39. No.31. (2006) 9797-9815.

25. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional dynamics of systems with long-range interaction // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol.11. No.8. (2006) 885-898.

26. Tarasov V.E. Zaslavsky G.M., Dynamics with low-level fractionality // Physica A. Vol.368. No.2. (2006) 399-415.

27. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction // Chaos. Vol.16. No.2. (2006) 023110. (13 pages)

28. Tarasov V.E. Transport equations from Liouville equations for fractional systems // International Journal of Modern Physics B. Vol.20. No.3. (2006) 341-353.

29. Tarasov V.E. Gravitational field of fractal distribution of particles // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Vol.94. No.1. (2006) 1-15.

30. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional dynamics of systems with long-range space interaction and temporal memory // Physica A. Vol.383. No.2. (2007) 291-308.

31. Zaslavsky G.M., Edelman M., Tarasov V.E. Dynamics of the chain of oscillators with long-range interaction: from synchronization to chaos // Chaos. Vol.17. No.4. (2007) 043124.

32. Korabel N., Zaslavsky G.M., Tarasov V.E. Coupled oscillators with power-law interaction and their fractional dynamics analogues // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol.12. No.8. (2007) 1405-1417.

33. Tarasov V.E. Fractional Chapman-Kolmogorov equation // Modern Physics Letters B. Vol.21. No.4. (2007) 163-174.

34. Tarasov V.E. Liouville and Bogoliubov equations with fractional derivatives // Modern Physics Letters B. Vol.21. No.5. (2007) 237-248.

35. Tarasov V.E. Fractional derivative as fractional power of derivative // International Journal of Mathematics. Vol.18. No.3. (2007) 281-299.

36. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Conservation laws and Hamiltonian's equations for systems with long-range interaction and memory // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol.13. No.9. (2008) 1860-1878.

37. Tarasov V.E. Fokker-Planck equation for fractional systems // International Journal of Modern Physics B. Vol.21. No.6. (2007) 955-967.

38. Tarasov V.E. *Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems* (Elsevier, Amsterdam, London, 2008). 540p.

39. Tarasov V.E. Fractional Heisenberg equation // Physics Letters A. Vol.372. No.17. (2008) 2984-2988.

40. Tarasov V.E. Chains with fractal dispersion law // Journal of Physics A. Vol.41. No.3. (2008) 035101. (6 pages)

41. Tarasov V.E. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations // Annals of Physics. Vol.323. No.11. (2008) 2756-2778.

42. Tarasov V.E. Fractional equations of Curie-von Schweidler and Gauss laws // Journal of Physics: Condensed Matter. Vol.20. No.14. (2008) 145212.

43. Tarasov V.E. Universal electromagnetic waves in dielectric // Journal of Physics: Condensed Matter. Vol.20. No.17. (2008) 175223.

44. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional generalization of Kac integral // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol.13. No.2. (2008) 248-258.

45. Tarasov V.E. Fractional powers of derivatives in classical mechanics // Communications in Applied Analysis. Vol.12. No.4. (2008) 441-450

46. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fokker-Planck equation with fractional coordinate derivatives // Physica A. Vol.387. No.26. (2008) 6505-6512.

47. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional equations of kicked systems and discrete maps // Journal of Physics A. Vol.41. No.43. (2008) 435101. (16 pages)

48. Tarasov V.E. Weyl quantization of fractional derivatives // Journal of Mathematical Physics. Vol.49. No.10. (2008) 102112. (6 pages)

49. Тарасов В.Е. Дробное обобщение квантового марковского производящего уравнения // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158. No.2. С. 214-233.

50. Тарасов В.Е. Дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн в диэлектрических средах // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158. No.3. С. 419-424.

51. Tarasov V.E. Differential equations with fractional derivative and universal map with memory // Journal of Physics A. Vol.42. No.46. (2009) 465102. (13 pages)

52. Tarasov V.E. Discrete map with memory from fractional differential equation of arbitrary positive order // Journal of Mathematical Physics. Vol.50. No.12. (2009) 122703. (6 pages)

53. Edelman M., Tarasov V.E. Fractional standard map // Physics Letters A. Vol.374. No.2. (2009) 279-285.

54. Tarasov V.E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, (Springer, Higher Education Press, 2010) 516p.

55. Tarasov V.E., Edelman M. Fractional dissipative standard map // Chaos. Vol.20. No.2. (2010) 023127. (7 pages).

56. Tarasov V.E. Fractional dynamics of relativistic particle // International Journal of Theoretical Physics. Vol.49. No.2. (2010) 293-303.

57. Tarasov V.E. Fractional Zaslavsky and Hénon discrete maps // Chapter 1 in *Long-range Interaction, Stochasticity and Fractional Dynamics* Luo A.C.J. Afraimovich V.S. (Eds.) (Springer, Higher Education Press, 2010) pp.1-26.

58. Тарасов В.Е. *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.

Подписано к печати 18.04.11

Тираж 100 Заказ 80.

Отпечатано в отделе оперативной печати физического факультета МГУ

102